5 Statystyka

Poniższa tabela zawiera szacunkowe dane dotyczące liczebności populacji bobra na terenie Polski w wybranych latach. Dane te pokazują, że od ostatniego ćwierćwiecza XX wieku następuje ciągły przyrost populacji bobra w naszym kraju.

Rok	1976	1980	1982	1986	1992	1994	2003	2020
Liczebność	500	1000	1800	3000	6000	7400	20 660	137 000

Na podstawie: *Krajowy plan ochrony gatunku. Bóbr europejski*, oprac. Andrzej Czech, Kraków 2007; www.wody.gov.pl

W tym rozdziale poznajemy pojęcia statystyczne związane z analizą danych. Wykorzystuje się je do opisu różnych zjawisk, także przy podejmowaniu kluczowych decyzji gospodarczych i społecznych.

Multi*teka*

- Czy olej rybny wpływa na inteligencję?
- Czy można wierzyć IQ?
- Diagram Nightingale
- Najpopularniejsze zwierzę domowe
- Nieprzewidziana wygrana
- Wizualizacja danych
- Zliczanie tłumu
- Zwykły Joe

Uczeń:

- oblicza średnią arytmetyczną zestawu danych,
- oblicza średnią arytmetyczną danych przedstawionych na diagramach lub pogrupowanych w inny sposób,
- wykorzystuje w zadaniach średnią arytmetyczną.

5.1. Średnia arytmetyczna

Przykład 1

W tabeli podano, ile punktów zdobyli dwaj zawodnicy A i B w sześciu kolejnych meczach koszykówki.

A	8	18	10	20	16	12
B	24	18	4	0	0	2

Średnia liczba punktów zdobytych przez zawodnika A:

$$\frac{8+18+10+20+16+12}{6} = 14$$

Średnia liczba punktów zdobytych przez zawodnika B:

$$\frac{24+18+4+0+0+2}{6} = 8$$

Definicja

Średnią arytmetyczną n liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Zamiast „średnia arytmetyczna" będziemy czasami pisać krótko: „średnia".

Ćwiczenie 1

W tabeli podano oceny z wybranych przedmiotów otrzymane przez troje uczniów klasy III na koniec semestru. Oblicz średnie ocen uzyskanych przez Basię i Tomka (zauważ, że Tomek nie uczy się języka francuskiego).

	J. polski	J. angielski	J. francuski	Historia	Matematyka	Biologia	Fizyka	Chemia	Geografia	WF	Średnia ocen
Agnieszka	6	5	5	5	4	5	4	3	5	4	4,6
Basia	2	1	2	3	4	3	4	3	2	5	2,9
Tomek	5	4	–	5	3	3	4	4	5	3	4,0

Ćwiczenie 2

Wynagrodzenia miesięczne pracowników pewnej firmy wyniosły (w złotych): 3300, 3250, 5500, 3350, 7500, 3300, 3000, 3100 i 2700. Ilu pracowników tej firmy otrzymało wynagrodzenie poniżej średniej?

Ćwiczenie 2

$\overline{x} = \frac{35\,000}{9} \approx 3889$ [zł]

siedmiu pracowników

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.1

Generator testów i sprawdzianów

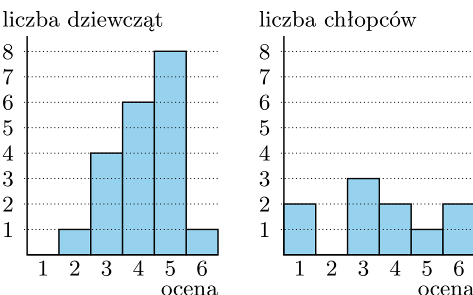
Ćwiczenie 3

Oblicz średnie arytmetyczne zestawów danych A, B i C. Sformułuj wniosek.

$$A = \{7, 7, 3, 4, 4, 11\}, \quad B = \{17, 17, 13, 14, 14, 21\}, \quad C = \{27, 27, 23, 24, 24, 31\}$$

Przykład 2

Na diagramach przedstawiono zestawienia ocen semestralnych z matematyki w klasie III (z podziałem na dziewczęta i chłopców).



Średnia ocen z matematyki w grupie dziewcząt:

$$\overline{x}_d = \frac{1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{1 + 4 + 6 + 8 + 1} = \frac{84}{20} = 4{,}2$$

Średnia ocen z matematyki w grupie chłopców:

$$\overline{x}_c = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{2 + 3 + 2 + 1 + 2} = \frac{36}{10} = 3{,}6$$

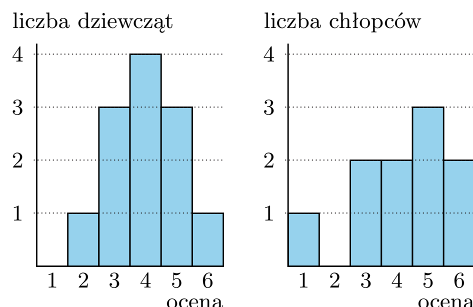
Średnią ocen z matematyki dla całej klasy możemy obliczyć, korzystając z obliczonych wcześniej średnich:

$$\overline{x}_k = \frac{20 \cdot \overline{x}_d + 10 \cdot \overline{x}_c}{10 + 20} = \frac{84 + 36}{30} = \frac{120}{30} = 4$$

Zwróć uwagę na to, że $\overline{x}_k$ nie jest równe $\frac{\overline{x}_d + \overline{x}_c}{2}$. Jak sądzisz, dlaczego?

Ćwiczenie 4

Na diagramach przedstawiono zestawienia ocen semestralnych z biologii w pewnej klasie (z podziałem na dziewczęta i chłopców). Oblicz średnie ocen z biologii dla grupy dziewcząt, grupy chłopców oraz dla całej klasy.



Ćwiczenie 5

a) Średnia arytmetyczna liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_8$ jest równa 16, a średnia arytmetyczna liczb: $x_2, \ldots, x_8$ jest równa 17. Oblicz x_1.

b) Średnia arytmetyczna liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_7$ jest równa 120, a średnia arytmetyczna liczb: x_2, x_4, x_6 jest równa 100. Oblicz średnią arytmetyczną liczb: x_1, x_3, x_5, x_7.

Ćwiczenie 3

$\overline{x}_A = \frac{36}{6} = 6$

$\overline{x}_B = \frac{96}{6} = 16$

$\overline{x}_C = \frac{156}{6} = 26$

Jeżeli wszystkie liczby zestawu danych zwiększymy o stałą wartość, to ich średnia arytmetyczna również zwiększy się o tę wartość.

Ćwiczenie 4

$\overline{x}_d = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{1+3+4+3+1} = \frac{48}{12} = 4$

$\overline{x}_c = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{1+2+2+3+2} = \frac{42}{10} = 4{,}2$

$\overline{x}_k = \frac{12 \cdot 4 + 10 \cdot 4{,}2}{22} = \frac{90}{22} \approx 4{,}09$

Ćwiczenie 5

a) $\frac{x_2 + x_3 + \ldots + x_8}{7} = 17$, czyli $x_2 + x_3 + \ldots + x_8 = 119$

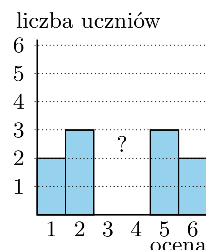
$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_8}{8} = \frac{x_1 + 119}{8} = 16$, czyli $x_1 = 9$

b) $\frac{x_1 + x_3 + x_5 + x_7}{4} = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_7) - (x_2 + x_4 + x_6)}{4} = \frac{120 \cdot 7 - 100 \cdot 3}{4} = \frac{840 - 300}{4} = \frac{540}{4} = 135$

Zadania

1. Klub zrzeszający dwunastu hodowców gołębi podał, że każdy z jego członków ma średnio 50 gołębi. Dane te okazały się nieaktualne, gdy jeden z klubowiczów sprzedał połowę swoich gołębi – ma ich teraz 36. Ile gołębi przypada średnio na jednego członka klubu obecnie?

2. Na diagramie przedstawiającym zestawienie ocen semestralnych z geografii w dwudziestoosobowej klasie nie zaznaczono liczby ocen dobrych i dostatecznych. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij diagram, jeśli wiadomo, że średnia ocen z geografii w tej klasie wynosi: a) 3,5, b) 3,25, c) 3,65.



3. W pewnej firmie zatrudniającej 15 pracowników średnie miesięczne wynagrodzenie wynosi 3800 zł. Jakie będzie średnie miesięczne wynagrodzenie, jeśli firma dodatkowo zatrudni:

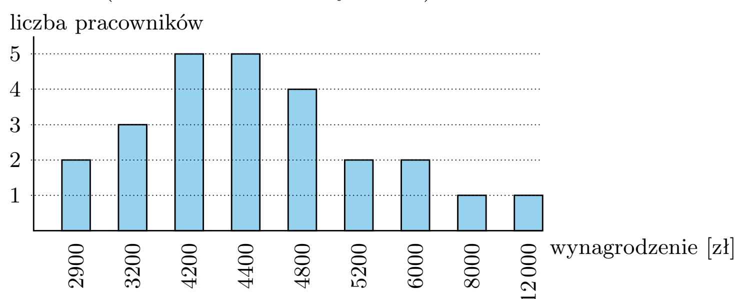
a) stażystę z wynagrodzeniem miesięcznym 2200 zł,

b) trzech stażystów, każdego z wynagrodzeniem miesięcznym 2300 zł?

4. Średnie miesięczne wynagrodzenie w pewnej firmie zatrudniającej 20 osób wynosiło 3200 zł. Zatrudniono nowego pracownika. Ile zarabia ten pracownik, jeśli obecnie średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie jest:

a) o 2% wyższe niż poprzednio, b) o 1% niższe niż poprzednio?

5. Na diagramie przedstawiono dane dotyczące miesięcznego wynagrodzenia pracowników banku (12 000 zł zarabia dyrektor).



a) Ile wynosi średnie miesięczne wynagrodzenie w tym banku?

b) Ile wynosi średnie miesięczne wynagrodzenie 10 najlepiej zarabiających pracowników, a ile – 10 zarabiających najgorzej?

c) Jaką podwyżkę otrzymał dyrektor, jeśli wszyscy pozostali pracownicy dostali po 400 zł podwyżki, a średnie miesięczne wynagrodzenie wzrosło o 10%?

Odpowiedzi do zadań

1. $\frac{12\cdot 50-36}{12} = \frac{564}{12} = 47$

2. a) dst – 5 osób
db – 5 osób
b) dst – 10 osób
db – 0 osób
c) dst – 2 osoby
db – 8 osób

3. a) $\frac{15\cdot 3800+2200}{15+1} = 3700$ [zł]

b) $\frac{15\cdot 3800+3\cdot 2300}{15+3} = \frac{63\,900}{18} =$
$= 3550$ [zł]

4. x – wynagrodzenie nowego pracownika

a) $\frac{20\cdot 3200+x}{20+1} = 3200\cdot 1{,}02$

$\frac{64\,000+x}{21} = 3264$

$x = 68\,544 - 64\,000 =$
$= 4544$ [zł]

b) $\frac{64\,000+x}{21} = 3200\cdot 0{,}99$

$x = 3168\cdot 21 - 64\,000 =$
$= 2528$ [zł]

5. a) $\frac{120\,000}{25} = 4800$ [zł]

b) najlepiej zarabiający: $\frac{61\,600}{10} = 6160$ [zł]

najgorzej zarabiający: $\frac{36\,400}{10} = 3640$ [zł]

c) x – podwyżka dyrektora

$\frac{24\cdot 400+x}{25} = 480$

$x = 2400$ zł

Czy wiesz, że…

Średnia arytmetyczna jest „wrażliwa” na dane bardzo odbiegające od pozostałych, dlatego czasem obliczamy ją po odrzuceniu z zestawu pewnej liczby danych największych i najmniejszych. Tak obliczona średnia nosi nazwę **średniej obciętej**.

Średnia obcięta ma swoje zastosowania np. w sporcie. Obliczenie ostatecznej oceny w jeździe figurowej na lodzie czy gimnastyce sportowej polega na odrzuceniu dwóch skrajnych ocen i obliczeniu średniej obciętej pozostałych.

6. Oblicz średnią podanego zestawu liczb oraz zestawu otrzymanego przez usunięcie dwóch liczb skrajnych (najmniejszej i największej).

a) 0, 2, 3, 4, 6, 9, 9, 127 b) 11, 12, 12, 13, 15, 17, 82

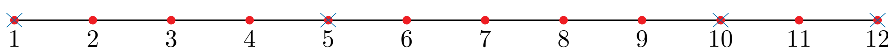
7. Oblicz średnią arytmetyczną zestawu liczb będących kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego: $2, 2^2, \ldots, 2^{12}$ oraz zestawu otrzymanego przez usunięcie dwóch liczb najmniejszych i dwóch liczb największych.

8. Czy w zamieszczonym obok kwadracie można skreślić jeszcze jedną liczbę tak, aby średnia arytmetyczna wszystkich skreślonych liczb:

a) wzrosła o 1, b) zmalała o 1, c) wzrosła o $33\frac{1}{3}\%$?

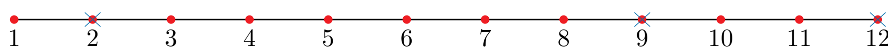
$\xcancel{1}$	2	3	4
5	$\xcancel{6}$	7	$\xcancel{8}$
$\xcancel{9}$	10	11	12
13	14	15	16

9. a) Wśród liczb naturalnych od 1 do 12 skreślono cztery (patrz rysunek).



Na ile sposobów można skreślić jeszcze dwie liczby tak, aby średnia arytmetyczna wszystkich skreślonych liczb nie uległa zmianie?

b) Wśród liczb naturalnych od 1 do 12 skreślono trzy (patrz rysunek).



Na ile sposobów można skreślić jeszcze trzy liczby tak, aby średnia arytmetyczna wszystkich skreślonych liczb nie uległa zmianie?

6. a) średnia:
$\frac{0+2+3+4+6+9+9+127}{8} = 20$
średnia obcięta:
$\frac{2+3+4+6+9+9}{6} = 5{,}5$
b) średnia:
$\frac{11+12+12+13+15+17+82}{7} = \frac{162}{7} = 23\frac{1}{7}$
średnia obcięta:
$\frac{12+12+13+15+17}{5} = \frac{69}{5} = 13{,}8$

7. średnia:
$\frac{2+2^2+\ldots+2^{12}}{12} = \frac{2\cdot\frac{1-2^{12}}{1-2}}{12} = 682{,}5$
średnia obcięta:
$\frac{2^3+\ldots+2^{10}}{8} = \frac{8\cdot\frac{1-2^8}{1-2}}{8} = 255$

8. $\frac{1+6+8+9}{4} = \frac{24}{4} = 6$
x – kolejna skreślona liczba
a) $\frac{24+x}{5} = 7$, czyli $x = 11$, tak
b) $\frac{24+x}{5} = 5$, czyli $x = 1$, nie
c) $\frac{24+x}{5} = 8$, czyli $x = 16$, tak

9. a) $\overline{x} = \frac{28}{4} = 7$, czyli szukamy par liczb, których średnia wynosi 7.
Są to $\{3, 11\}$ i $\{6, 8\}$.
Zatem liczby można skreślić na 2 sposoby.
b) $\overline{x} = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}$, czyli szukamy trójek liczb, których suma wynosi 23.
Są to $\{4, 8, 11\}$, $\{5, 7, 11\}$, $\{5, 8, 10\}$ i $\{6, 7, 10\}$.
Zatem liczby można skreślić na 4 sposoby.

Uczeń:

- wyznacza medianę i dominantę zestawu danych,
- odczytuje informacje ze skali centylowej,
- wyznacza medianę i dominantę danych przedstawionych na diagramach lub pogrupowanych w inny sposób,
- wykorzystuje w zadaniach medianę i dominantę.

5.2. Mediana, skala centylowa i dominanta

Poza średnią arytmetyczną rozpatrujemy też inne wielkości służące do analizy danych. Jedną z nich jest wartość środkowa – **mediana**. Aby ją wyznaczyć, porządkujemy dane od wartości najmniejszej do największej, na przykład:

1, 2, 2, [2], 5, 5, 6 – medianą jest liczba 2,

−3, −3, 0, 0, 2, [7], 9, 11, 13, 17, 18 – medianą jest liczba 7.

Medianą nieparzystej liczby danych jest wartość środkowa. W przypadku parzystej liczby danych medianą jest średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wartości środkowych, na przykład:

1, 2, [3], [8], 9, 14 – mediana jest równa $\frac{3+8}{2} = 5{,}5$.

Zauważ, że mediana dzieli dane na dwie równoliczne grupy. Dane w jednej grupie są od niej mniejsze lub jej równe, dane w drugiej – większe lub równe.

Ćwiczenie 1

Wyznacz medianę podanych liczb.

a) 1, 2, 3, 10, 20 b) 6, 10, 11, 11, 20, 7 c) 18, 6, 4, 10, 5, 4

Ćwiczenie 1 (odpowiedź)

a) 3 **b)** 10,5 **c)** 5,5

Ćwiczenie 2

W stadninie zważono wszystkie konie i otrzymano następujące wyniki (w kilogramach):

– ogiery: 530, 550, 550, 590, 565, 570, 560, 540;

– klacze: 490, 500, 510, 540, 505, 500.

Wyznacz mediany wagi: a) ogierów, b) klaczy, c) wszystkich koni w stadninie.

Ćwiczenie 2 (odpowiedź)

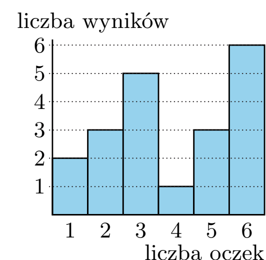
a) 530, 540, 550, 550, 560, 565, 570, 590
mediana: 555 kg

b) 490, 500, 500, 505, 510, 540
mediana: 502,5 kg

c) 490, 500, 500, 505, 510, 530, 540, 540, 550, 550, 560, 565, 570, 590
mediana: 540 kg

Ćwiczenie 3

Rzucono 20 razy kostką. Na diagramie obok przedstawiono, ile razy otrzymano poszczególne liczby oczek. Wyznacz medianę uzyskanych wyników.



Ćwiczenie 3 (odpowiedź)

$\frac{3+4}{2} = 3{,}5$

Ćwiczenie 4

Podaj przykład pięciu liczb, których mediana jest:

a) większa od ich średniej arytmetycznej,

b) mniejsza od ich średniej arytmetycznej.

Ćwiczenie 5

Średnia arytmetyczna zestawu liczb: 8, 6, 3, x, 8, $x+4$, 4, 6, 7, 8 jest równa 7. Ile wynosi mediana tego zestawu liczb?

Ćwiczenie 4 (odpowiedź)

Przykładowa odpowiedź:

a) 1, 1, 5, 6, 7, mediana: 5, średnia: 4

b) 1, 2, 3, 6, 8, mediana: 3, średnia: 4

Ćwiczenie 5 (odpowiedź)

$\frac{2x+54}{10} = 7$, czyli $x = 8$

3, 4, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 12

mediana: $\frac{7+8}{2} = 7{,}5$

Multiteka
- Skala centylowa

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.2

Generator testów i sprawdzianów

Aby wskazać położenie wybranej danej względem innych danych, używa się **skali centylowej**. Podając centyl, któremu odpowiada liczba x (mówimy też: w którym mieści się liczba x), określamy, jaki jest procent liczb mniejszych lub równych tej liczbie.

Przykład 1

W poniższej tabeli podano, jakie wartości centyli odpowiadają poszczególnym wynikom procentowym uzyskanym na egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie rozszerzonym przeprowadzonym w maju 2019 roku.

Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla
0	3	34	51	68	81
2	8	36	53	70	83
4	12	38	55	72	84
6	17	40	57	74	86
8	21	42	59	76	87
10	24	44	61	78	89
12	27	46	62	80	90
14	30	48	64	82	91
16	33	50	66	84	93
18	35	52	68	86	94
20	37	54	69	88	95
22	40	56	71	90	96
24	42	58	73	92	97
26	44	60	74	94	98
28	46	62	76	96	99
30	48	64	78	98	100
32	50	66	79	100	100

Źródło: https://cke.gov.pl

Z tabeli można odczytać, że:

- Jeśli maturzysta uzyskał na egzaminie 30% punktów możliwych do zdobycia, to wynik ten odpowiada 48. centylowi, co oznacza, że 48% maturzystów podchodzących do tego egzaminu uzyskało wynik niższy lub taki sam, natomiast 52% maturzystów uzyskało wynik wyższy.
- Jeśli maturzysta uzyskał na egzaminie 98% punktów możliwych do zdobycia, to wynik ten odpowiada 100. centylowi, co oznacza, że w przybliżeniu 100% maturzystów podchodzących do tego egzaminu uzyskało wynik niższy lub taki sam, natomiast mniej niż 1% maturzystów uzyskało wynik wyższy.

Ćwiczenie 6
a) 34%
b) 40. centyl: 22%,
90. centyl: 80%

Ćwiczenie 6

a) Ile procent maturzystów podchodzących do egzaminu maturalnego z matematyki rozszerzonej w maju 2019 roku uzyskało wynik lepszy od maturzysty, który zdobył na tym egzaminie 50% punktów?

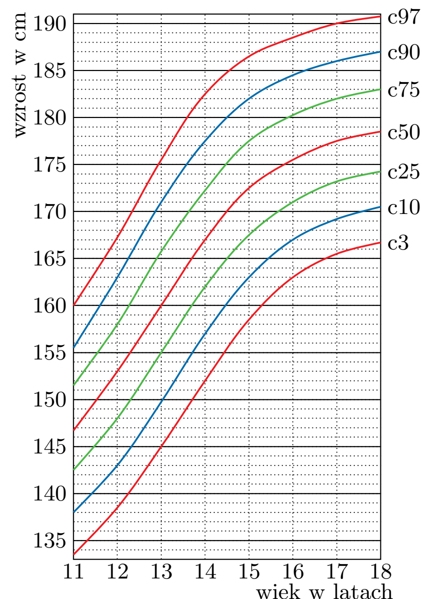
b) Jaki procentowy wynik z egzaminu maturalnego z matematyki rozszerzonej w maju 2019 roku odpowiada 40. centylowi, a jaki – 90. centylowi wyników egzaminu?

Przykład 2

Przedstawiona obok siatka jest siatką centylową wzrostu chłopców w wieku 11–18 lat.

Zaznaczone linie opisują centyle: 3, 10, 25, 50, 75, 90 i 97.

- W wieku 13 lat chłopiec o wzroście 160 cm mieści się w 50. centylu.
- W wieku 16 lat chłopiec o wzroście większym (lub równym) od 75% swoich rówieśników mierzy ponad 180 cm.



Siatka centylowa wzrostu chłopców w wieku 11–18 lat
Źródło: http://www.czd.pl

Ćwiczenie 7
a) 50. **b)** 10%

Ćwiczenie 7

a) Czternastoletni chłopiec ma 167 cm wzrostu. W którym centylu mieści się jego wzrost?

b) Siedemnastolatek ma 186 cm wzrostu. Ile procent jego rówieśników jest od niego wyższych?

Kolejną wielkością przydatną podczas analizy danych jest **dominanta** – wartość, która występuje wśród danych najczęściej (dominanta bywa również nazywana **wartością modalną** lub **modą**).
Na przykład dla liczb: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 6 dominantą jest liczba 2.
Jeśli w zestawie danych kilka liczb występuje z tą samą, najwyższą częstością, to przyjmujemy, że każda z tych liczb jest dominantą. Jeżeli natomiast wszystkie liczby występują tak samo często, to przyjmujemy, że nie ma dominanty.

Ćwiczenie 8

Sprzedawca zanotował rozmiary butów męskich, które sprzedał pewnego dnia: 42, 44, 41, 42, 43, 42, 44, 42, 45, 43, 45, 46. Wyznacz medianę i dominantę tych danych. Który rozmiar butów był kupowany najczęściej?

Ćwiczenie 8

41, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 44, 44, 45, 45, 46
mediana: 43, dominanta: 42
Najczęściej był kupowany rozmiar 42.

Ćwiczenie 9

Nauczyciel biologii zrobił zestawienie wyników trzech sprawdzianów przeprowadzonych w dwudziestoosobowej klasie (tabela obok). Po kolejnym sprawdzianie dopisał do niego nowe oceny. Wyznacz dominantę i medianę ocen w nowym zestawieniu, jeśli wiadomo, że z tego sprawdzianu:

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	4	10	23	2	19	2

a) wszyscy uczniowie otrzymali ocenę dobrą,

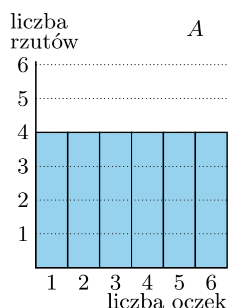
b) połowa uczniów otrzymała ocenę bardzo dobrą, a pozostali – niedostateczną.

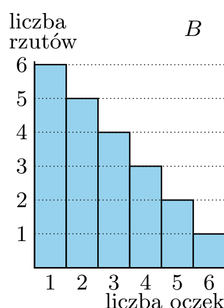
Zadania

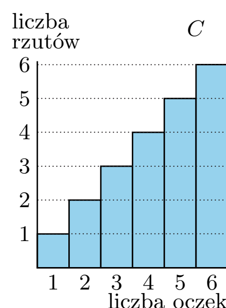
1. Oznaczmy przez $\overline{x}$, M i D odpowiednio średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu liczb: 1, 2, 3, 4, c, 2, 3, 4, 4, 4. Oblicz c, jeśli:

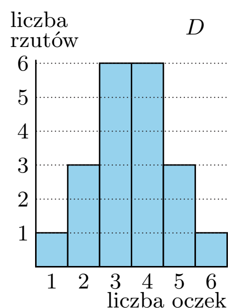
a) $\overline{x} = D$, b) $\overline{x} = M$.

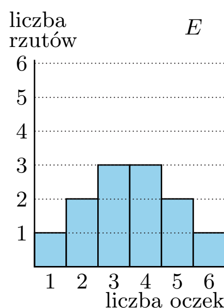
2. Każda z osób A, B, C, D, E, F wykonała serię rzutów kostką. Na diagramach przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek w seriach. Wyznacz medianę, dominantę i średnią arytmetyczną liczb oczek wyrzuconych w każdej serii.

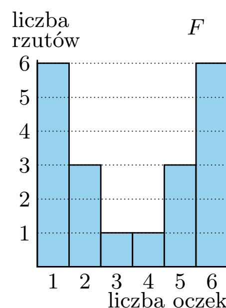












Ćwiczenie 9

a) mediana: 4, dominanta: 3

b) mediana: 3, dominanta: 5

Odpowiedzi do zadań

1. a) $D = 4$, $\overline{x} = \frac{27+c}{10} = 4$, czyli $c = 13$

b) 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4

Jeżeli $c \geqslant 4$, to $M = 3{,}5$ i $\overline{x} = \frac{27+c}{10} = 3{,}5$, czyli $c = 8$.

Jeżeli $c \leqslant 3$, to $M = 3$ i $\overline{x} = \frac{27+c}{10} = 3$, czyli $c = 3$.

Zatem $c = 3$ lub $c = 8$.

2. A: $M = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$, nie ma dominanty, $\overline{x} = 3{,}5$

B: $M = 2$, $D = 1$, $\overline{x} = 2\frac{2}{3}$

C: $M = 5$, $D = 6$, $\overline{x} = 4\frac{1}{3}$

D: $M = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$, $D_1 = 3$, $D_2 = 4$, $\overline{x} = 3{,}5$

E: $M = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$, $D_1 = 3$, $D_2 = 4$, $\overline{x} = 3{,}5$

F: $M = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$, $D_1 = 1$, $D_2 = 6$, $\overline{x} = 3{,}5$

3. a)

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Liczba wyników	5	6	7	8	9	10

$M = 4,\ D = 6,\ \overline{x} = \frac{175}{45} = 3\frac{8}{9}$

b)

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Liczba wyników	10	9	8	7	6	5

$M = 3,\ D = 1,\ \overline{x} = \frac{140}{45} = 3\frac{1}{9}$

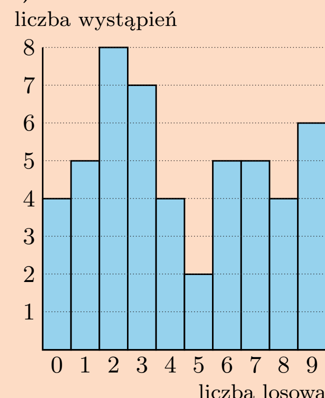
c)

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Liczba wyników	7	7	7	7	7	7

$M = 3{,}5$, nie ma dominanty,
$\overline{x} = \frac{7 \cdot 21}{7 \cdot 6} = 3{,}5$

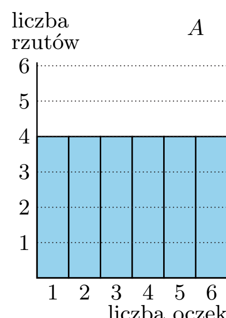
4. a) $\overline{x} = \frac{226}{50} = 4{,}52,\ M = 5$,
liczba 2: 32. centyl,
liczba 7: 88. centyl

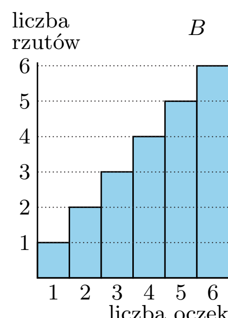
b)

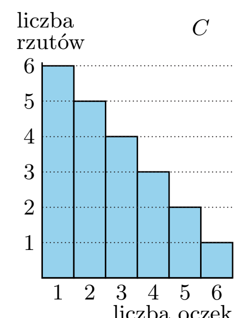


$\overline{x} = \frac{219}{50} = 4{,}38,\ M = 4$,
$D = 2$, liczba 3: 48. centyl

3. Każda z osób A, B, C wykonała serię rzutów kostką. Na diagramach przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek w seriach. Wyznacz medianę, dominantę i średnią arytmetyczną liczb oczek wyrzuconych łącznie przez osoby: a) A i B, b) A i C, c) B i C.







Czy wiesz, że...

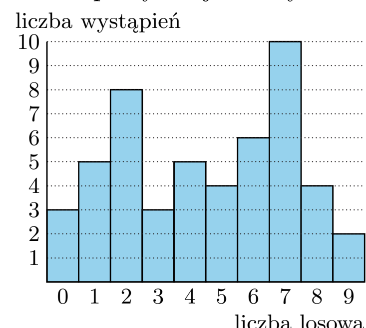
W niektórych zagadnieniach (np. w kryptografii) wykorzystuje się liczby losowe. Liczby te można wygenerować za pomocą programu komputerowego lub można skorzystać z odpowiednich tablic. Poniżej podano osiem wierszy tablicy liczb losowych, w której występują liczby od 0 do 9 odpowiednio pogrupowane.

1.	46016	24742	21311	88342	67778	20741	26755	55382	96777	06729
2.	89311	86439	32128	17700	90725	01936	23678	54622	27342	96439
3.	09006	57476	64080	47646	68020	32924	68500	81779	17120	57784
4.	84642	87958	96983	80086	19451	53725	82606	54516	62617	67000
5.	88645	63989	45783	33657	54733	68580	97232	98073	27454	36174
6.	75815	34604	83791	91421	09176	49317	17045	79972	65081	32075
7.	37019	94048	44462	48948	29999	19107	51184	89352	00122	07222
8.	01324	69795	95403	20891	89075	82476	02147	19961	84203	02724

4. Wykonano diagram dla liczb z pierwszego wiersza powyższej tablicy liczb losowych.

a) Oblicz ich średnią arytmetyczną oraz medianę. Któremu centylowi odpowiada liczba 2, a któremu liczba 7?

b) Wykonaj analogiczny diagram dla liczb z drugiego wiersza tablicy. Wyznacz ich średnią arytmetyczną, medianę i dominantę. Któremu centylowi odpowiada liczba 3?



5. Poniżej przedstawiono tabelę zawierającą skalę centylową wyników egzaminu maturalnego z fizyki (poziom rozszerzony, maj 2019 roku).

Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla
0	1	33	46	67	81
2	1	35	48	68	82
3	1	37	50	70	83
5	2	38	52	72	85
7	4	40	54	73	86
8	6	42	56	75	87
10	8	43	58	77	89
12	11	45	60	78	90
13	14	47	61	80	91
15	16	48	63	82	92
17	19	50	65	83	93
18	22	52	66	85	94
20	25	53	68	87	95
22	28	55	70	88	96
23	31	57	71	90	97
25	33	58	73	92	98
27	36	60	75	93	99
28	39	62	76	95	99
30	41	63	78	97	100
32	43	65	79	98	100
				100	100

Źródło: https://cke.gov.pl

a) Jaki wynik procentowy gwarantował znalezienie się w gronie 15% maturzystów, którzy uzyskali najlepsze wyniki na tym egzaminie?

b) Wynik procentowy pewnego maturzysty równy jest medianie wyników egzaminu, a wynik jego kolegi odpowiada 60. centylowi. O ile punktów procentowych różnią się ich wyniki z tego egzaminu?

6. Oznaczmy przez $\overline{x}$, M i D odpowiednio średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu danych. Podaj przykład pięciu liczb, które spełniają warunek:

a) $\overline{x} < M < D$, b) $D < \overline{x} < M$, c) $M < \overline{x} < D$, d) $D < M < \overline{x}$.

7. Oznaczmy przez $\overline{x}$, M i D odpowiednio średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu danych. Podaj przykład siedmiu liczb, które spełniają warunek: a) $\overline{x} < D < M$, b) $M < D < \overline{x}$.

5. **a)** 73%
b) Mediana wyników: 37%
60. centyl: 45%
$45 - 37 = 8$ punktów procentowych

6. Przykładowa odpowiedź:
a) 1, 2, 3, 4, 4
$\overline{x} = 2{,}8$, $M = 3$, $D = 4$
b) 1, 1, 3, 4, 5
$D = 1$, $\overline{x} = 2{,}8$, $M = 3$
c) 1, 2, 3, 6, 6
$M = 3$, $\overline{x} = 3{,}6$, $D = 6$
d) 1, 1, 3, 5, 10
$D = 1$, $M = 3$, $\overline{x} = 4$

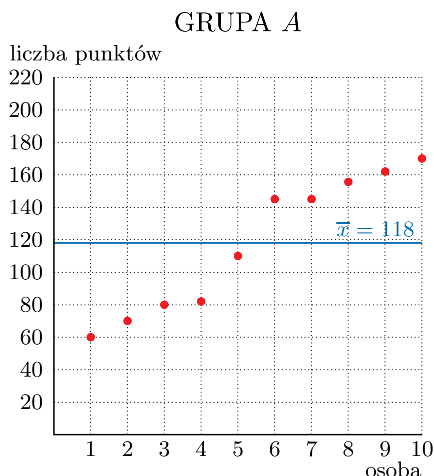
7. Przykładowa odpowiedź:
a) −15, 2, 2, 3, 4, 5, 6
$\overline{x} = 1$, $D = 2$, $M = 3$
b) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 22
$M = 4$, $D = 5$, $\overline{x} = 6$

Uczeń:
- oblicza wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych,
- oblicza wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych przedstawionych różnymi sposobami.

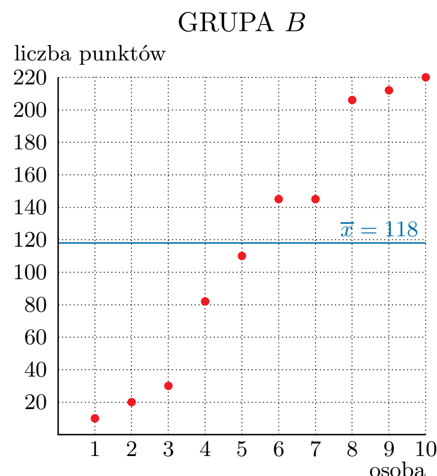
5.3. Odchylenie standardowe

Przykład 1

W dwóch dziesięcioosobowych grupach studentów przeprowadzono ten sam egzamin oceniany w skali 0–220 punktów. Wyniki otrzymane w grupach A i B przedstawiono na diagramach.



Wyniki w grupie A: 60, 70, 80, 82, 110, 145, 145, 156, 162, 170



Wyniki w grupie B: 10, 20, 30, 82, 110, 145, 145, 206, 212, 220

Obydwa zestawy danych mają średnią arytmetyczną równą 118, medianę – 127,5 oraz dominantę – 145. Jednak rozproszenie wyników w grupie B jest znacznie większe niż w grupie A. Jako miarę rozproszenia danych wokół ich średniej przyjmuje się **odchylenie standardowe**.

Definicja

Wariancją liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n}$$

gdzie $\overline{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Odchyleniem standardowym liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę σ określoną za pomocą wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n}}$$

Uwaga. Wariancja jest równa σ^2 i jest w ten sposób oznaczana.

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.3

Generator testów i sprawdzianów

Przykład 2

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe danych: 4, 9, 11, 13, 13.

Obliczamy średnią i wariancję:

$$\overline{x} = \frac{4+9+11+13+13}{5} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{(4-10)^2+(9-10)^2+(11-10)^2+(13-10)^2+(13-10)^2}{5} = \frac{56}{5} = 11{,}2$$

Zatem odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{11{,}2} \approx 3{,}35$.

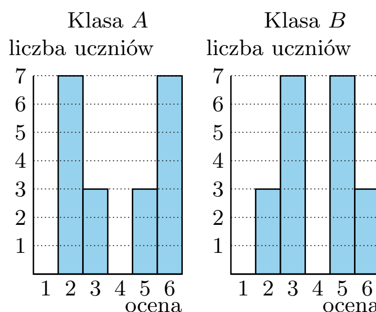
Ćwiczenie 1

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe danych:

a) 4, 5, 6, 7, 8; b) 3, 6, 6, 6, 9; c) 8, 12, 13, 13, 14.

Przykład 3

Na diagramach przedstawiono oceny semestralne z muzyki w dwóch dwudziestoosobowych klasach. Średnia ocen w obu klasach jest równa 4. Pokaż, że odchylenie standardowe ocen jest większe w klasie A.



Obliczając wariancję w klasie A, wykorzystujemy pogrupowanie danych:

$$\sigma_A^2 = \frac{7\cdot(2-4)^2+3\cdot(3-4)^2+3\cdot(5-4)^2+7\cdot(6-4)^2}{20} = \frac{62}{20} = 3{,}1$$

Odchylenie standardowe $\sigma_A = \sqrt{3{,}1} \approx 1{,}76$.

Analogicznie obliczamy wariancję w klasie B:

$$\sigma_B^2 = \frac{3\cdot(2-4)^2+7\cdot(3-4)^2+7\cdot(5-4)^2+3\cdot(6-4)^2}{20} = \frac{38}{20} = 1{,}9$$

Odchylenie standardowe $\sigma_B = \sqrt{1{,}9} \approx 1{,}38$. Zatem $\sigma_A > \sigma_B$.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, dla którego zestawu danych, A czy B, odchylenie standardowe jest większe.

A: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5 B: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5

Ćwiczenie 3

Oblicz odchylenia standardowe zestawów liczb A i B. Sformułuj wniosek.

A: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 B: 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14

Ćwiczenie 1

a) $\overline{x} = \frac{30}{5} = 6$

$\sigma^2 = \frac{4+1+1+4}{5} = 2$

$\sigma = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

b) $\overline{x} = \frac{30}{5} = 6$

$\sigma^2 = \frac{9+9}{5} = 3{,}6$

$\sigma = \sqrt{3{,}6} \approx 1{,}9$

c) $\overline{x} = \frac{60}{5} = 12$

$\sigma^2 = \frac{16+1+1+4}{5} = 4{,}4$

$\sigma = \sqrt{4{,}4} \approx 2{,}1$

Ćwiczenie 2

$\overline{x}_A = \frac{33}{11} = 3$, $\sigma_A = \sqrt{\frac{12+2+2+12}{11}} = \sqrt{\frac{28}{11}} > \sqrt{2}$

$\overline{x}_B = \frac{27}{9} = 3$, $\sigma_B = \sqrt{\frac{4+2+2+4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} < \sqrt{2}$

$\sigma_A > \sigma_B$

Ćwiczenie 3

A: $\overline{x} = 3$, $\sigma = \sqrt{1} = 1$; B: $\overline{x} = 13$, $\sigma = \sqrt{1} = 1$

Jeżeli wszystkie liczby zestawu danych zwiększymy o stałą wielkość, to odchylenie standardowe się nie zmieni.

Ćwiczenie 4

Dane są zbiory: $X = \{1, -1, 2, -2, 3, -3\}$ i $Y = \{10, -10, 20, -20, 30, -30\}$. Ile razy odchylenie standardowe liczb ze zbioru Y jest większe od odchylenia standardowego liczb ze zbioru X?

Ćwiczenie 5

W tabeli przedstawiono dane dotyczące miesięcznego wynagrodzenia w dwóch firmach. Oblicz wariancję oraz odchylenie standardowe wynagrodzeń w firmie X i w firmie Y.

	Firma X			Firma Y		
Liczba pracowników	2	16	2	16	2	2
Wynagrodzenie [zł]	3000	3500	4000	3000	5000	6000

Uwaga. Odchylenie standardowe jest wyrażane w tej samej jednostce co analizowane dane, a wariancja – w tej jednostce podniesionej do kwadratu.

Wariancję liczb można również obliczyć, korzystając z podanego niżej wzoru.

> Wariancja liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, których średnia arytmetyczna jest równa $\overline{x}$, wyraża się za pomocą wzoru:
> $$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (\overline{x})^2$$

Dowód

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} =$$
$$= \frac{x_1^2 - 2x_1\overline{x} + (\overline{x})^2 + x_2^2 - 2x_2\overline{x} + (\overline{x})^2 + \ldots + x_n^2 - 2x_n\overline{x} + (\overline{x})^2}{n} =$$
$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} + \frac{n(\overline{x})^2 - 2\overline{x}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} =$$
$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \frac{n(\overline{x})^2}{n} =$$
$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (\overline{x})^2$$

Zauważ, że $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n\overline{x}$.

Ćwiczenie 6

W pewnej firmie analizowano staż pracy pracowników – dane zestawiono w tabeli. Oblicz średni staż pracy pracowników tej firmy oraz wariancję i odchylenie standardowe.

Staż pracy w latach	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liczba pracowników	6	5	3	2	4	2	3	2	0	1

Ćwiczenie 4

X: $\overline{x} = 0$

$\sigma_X = \sqrt{\frac{2+8+18}{6}} = \sqrt{\frac{14}{3}}$

Y: $\overline{x} = 0$

$\sigma_Y = \sqrt{\frac{200+800+1800}{6}} =$

$= \sqrt{\frac{1400}{3}} = 10\sqrt{\frac{14}{3}}$

dziesięć razy

Ćwiczenie 5

X: $\overline{x} = 3500$ zł

$\sigma^2 = \frac{4 \cdot 25 \cdot 10^4}{20} = 50\,000$ [zł^2]

$\sigma = 100\sqrt{5} \approx 223{,}61$ [zł]

Y: $\overline{x} = 3500$ zł

$\sigma^2 = 1\,050\,000$ zł^2

$\sigma = 100\sqrt{105} \approx 1024{,}70$ [zł]

Ćwiczenie 6

$\overline{x} = \frac{112}{28} = 4$

$\sigma^2 = \frac{632}{28} - 16 = 22\frac{4}{7} - 16 = 6\frac{4}{7}$

$\sigma \approx 2{,}56$

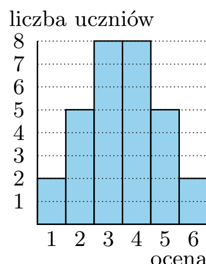
Zadania

1. Oblicz średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie standardowe danych:

a) 5, 5, 5, 5, 5, 5;
b) 4, 4, 4, 6, 6, 6;
c) 3, 3, 3, 7, 7, 7;
d) 3, 4, 5, 5, 6, 7;
e) 2, 2, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9;
f) 4, 5, 9, 9, 9, 9, 9, 10.

2. Przed rozpoczęciem zawodów sumo zważono sześciu zawodników i otrzymano następujące wyniki (w kilogramach): 170, 190, 160, 170, 180, 150. Oblicz wariancję i odchylenie standardowe otrzymanych danych.

3. Na diagramie przedstawiono zestawienie ocen semestralnych z fizyki w klasie IIIc.

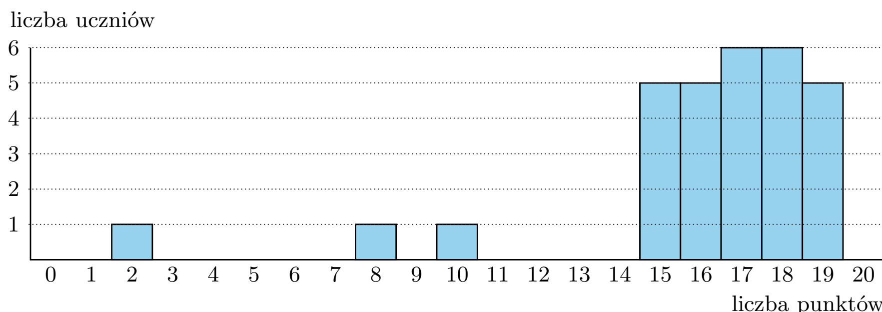


a) Oblicz odchylenie standardowe tych ocen.

b) Ilu uczniów otrzymało ocenę różniącą się od średniej ocen o mniej niż odchylenie standardowe?

c) Ilu uczniów otrzymało ocenę mieszczącą się w przedziale $(\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma)$?

4. Sprawdzian ze statystyki przeprowadzony w klasie IIIa był punktowany w skali od 0 do 20 punktów. Jego wyniki przedstawiono na poniższym diagramie.



a) Ilu uczniów otrzymało wynik spoza przedziału $(\overline{x} - \sigma; \overline{x} + \sigma)$?

b) Czy któryś uczeń otrzymał wynik spoza przedziału $(\overline{x} - 3\sigma; \overline{x} + 3\sigma)$?

5. Grupę dziesięciorga uczniów zapytano o to, ile minut każdy z nich jedzie do szkoły. Dziewczęta podały odpowiedzi: 60, 30, 20, 10, natomiast chłopcy: 30, 35, 20, 35, 25, 35. Oblicz średni czas dojazdu oraz wariancję i odchylenie standardowe dla:

a) grupy dziewcząt,
b) grupy chłopców,
c) całej dziesięcioosobowej grupy.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\overline{x} = 5$, $\sigma^2 = 0$, $\sigma = 0$
b) $\overline{x} = 5$, $\sigma^2 = 1$, $\sigma = 1$
c) $\overline{x} = 5$, $\sigma^2 = 4$, $\sigma = 2$
d) $\overline{x} = 5$, $\sigma^2 = \frac{5}{3}$, $\sigma \approx 1{,}29$
e) $\overline{x} = 6$, $\sigma^2 = \frac{16}{3}$, $\sigma \approx 2{,}31$
f) $\overline{x} = 8$, $\sigma^2 = 4{,}25$, $\sigma \approx 2{,}06$

2. $\overline{x} = 170$ kg, $\sigma^2 \approx 166{,}7$ kg^2, $\sigma \approx 12{,}9$ kg

3. $\overline{x} = 3{,}5$
a) $\sigma \approx 1{,}3$ **b)** 16 **c)** 30

4. $\overline{x} = \frac{480}{30} = 16$

$\sigma = \sqrt{\frac{196+64+36+5+6+24+45}{30}} = \sqrt{\frac{376}{30}} \approx 3{,}54$

a) $\overline{x} - \sigma \approx 12{,}46$, $\overline{x} + \sigma \approx 19{,}54$
trzech uczniów

b) $\overline{x} - 3\sigma \approx 5{,}38$, $\overline{x} + 3\sigma > 19$
tak, jeden uczeń

5. a) $\overline{x} = 30$ min, $\sigma^2 = 350$ min^2, $\sigma \approx 18{,}71$ min
b) $\overline{x} = 30$ min, $\sigma^2 = 33\frac{1}{3}$ min^2, $\sigma \approx 5{,}77$ min
c) $\overline{x} = 30$ min, $\sigma^2 = 160$ min^2, $\sigma \approx 12{,}65$ min

Korelacja

O dodatniej korelacji między dwiema zmiennymi w statystyce mówimy, gdy wzrost jednej z nich powiązany jest ze wzrostem drugiej.

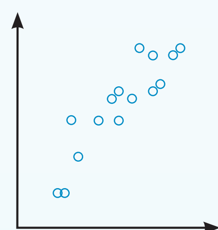
Na przykład zbierając dane dotyczące czasu spędzonego na bieganiu i liczby spalonych kalorii, możemy oczekiwać dodatniej korelacji tych danych.

Aby zmierzyć korelację między zmiennymi x i y na podstawie par danych: (x_1, y_1), (x_2, y_2), … , (x_n, y_n), których średnie arytmetyczne wynoszą odpowiednio $\overline{x}$ i $\overline{y}$, oblicza się **współczynnik korelacji *r* Pearsona** [czyt. pirsona]:

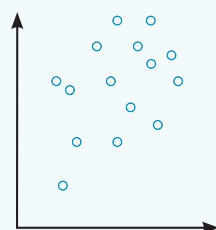
$$r = \frac{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y}) + (x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y}) + \ldots + (x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})}{\sqrt{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2} \cdot \sqrt{(y_1-\overline{y})^2 + (y_2-\overline{y})^2 + \ldots + (y_n-\overline{y})^2}}$$

Wartość tego współczynnika dla korelacji dodatnich jest liczbą z przedziału $(0; 1)$.

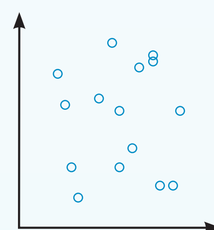
Poniższe wykresy przedstawiają zestawy danych o silnej, słabej i zerowej korelacji.



silna korelacja dodatnia, $r = 0{,}9$



słaba korelacja dodatnia, $r = 0{,}4$



korelacja zerowa, $r = 0$

1 W tabeli zestawiono informacje o wzroście (x, w cm) i masie ciała (y, w kg) 10 osób. Oblicz współczynnik korelacji dla tych danych.

x	167	169	172	174	175	176	177	178	180	184
y	69	67	74	70	70	74	78	76	82	80

1. $r = \frac{194}{\sqrt{229{,}6} \cdot \sqrt{226}} \approx 0{,}85$

Warto wiedzieć

Inne miary rozrzutu danych

Miarą rozrzutu danych jest również **rozstęp**, czyli różnica między największą i najmniejszą z danych liczb.

1. W poniższej tabeli podano wyniki pomiarów temperatury powietrza (w °C) przeprowadzonych w ciągu czterech kolejnych dni listopada.

Dzień \ Godzina	6	8	10	12	14	16	18	20
13 listopada	−4	−2	−1	0	3	5	4	3
14 listopada	−1	0	1	3	5	5	2	1
15 listopada	2	3	6	9	11	10	9	6
16 listopada	4	6	8	10	10	8	6	4

Oblicz rozstęp i odchylenie standardowe:

a) wyników uzyskanych każdego dnia,

b) wszystkich wyników uzyskanych w ciągu czterech dni.

1. a) 13: rozstęp 9°C, $\sigma = 3°C$
14: rozstęp 6°C, $\sigma \approx 2{,}06°C$
15: rozstęp 9°C, $\sigma \approx 3{,}08°C$
16: rozstęp 6°C, $\sigma \approx 2{,}24°C$
b) rozstęp: 15°C, $\sigma \approx 3{,}82°C$

2. Zbierz dane dotyczące wzrostu uczniów w twojej klasie. Oblicz rozstęp i odchylenie standardowe tych danych.

Jako miary rozrzutu danych używa się też odchylenia przeciętnego.

Odchyleniem przeciętnym (bezwzględnym) liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o średniej arytmetycznej $\overline{x}$ nazywamy liczbę określoną za pomocą wzoru:

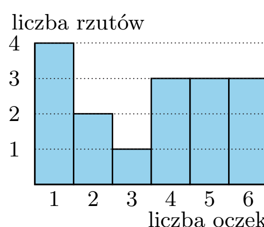
$$d = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n}$$

Odchylenia przeciętnego używał Pierre Simon de Laplace [czyt. pier simą de laplas] (1749–1827).

3. Sprawdź, czy odchylenie przeciętne dla podanych liczb jest mniejsze, równe czy większe od odchylenia standardowego.

a) 5, 10 b) 2, 4, 6, 12 c) 2, 4, 6, 8, 15

4. Na diagramie obok przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek podczas serii rzutów kostką. Oblicz średnią arytmetyczną, odchylenie standardowe i odchylenie przeciętne tych danych.



3. a) $\overline{x} = 7{,}5$, $d = \frac{2{,}5+2{,}5}{2} = 2{,}5$, $\sigma = \sqrt{\frac{2{,}5^2+2{,}5^2}{2}} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$, równe

b) $\overline{x} = 6$, $d = \frac{4+2+6}{4} = 3$, $\sigma = \sqrt{\frac{16+4+36}{4}} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$, mniejsze

c) $\overline{x} = 7$, $d = \frac{5+3+1+1+8}{5} = 3{,}6$, $\sigma = \sqrt{\frac{25+9+2+64}{5}} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$, mniejsze

4. $\overline{x} = 3{,}5$, $\sigma \approx 1{,}87$, $d = 1{,}6875$

Uczeń:
- oblicza średnią ważoną zestawu liczb z podanymi wagami,
- stosuje w zadaniach średnią ważoną.

5.4. Średnia ważona

Przykład 1

Podczas egzaminu z języka obcego wypowiedź studenta oceniano w dwóch kategoriach: x_1 – ocena za umiejętność komunikacji, x_2 – ocena za poprawność gramatyczną. Ostateczną ocenę z egzaminu ustalano, korzystając ze wzoru:

$$\frac{3x_1 + x_2}{3+1}$$

W ten sposób zwiększono znaczenie (wagę) oceny za umiejętność komunikacji w stosunku do oceny za poprawność gramatyczną. W tabeli podano oceny, które otrzymali Agata, Marek i Tomek.

	x_1	x_2	$\frac{3x_1+x_2}{4}$	Ocena z egzaminu
Agata	5	3	$\frac{3\cdot 5+3}{4} = \frac{18}{4}$	4,5
Marek	6	2	$\frac{3\cdot 6+2}{4} = \frac{20}{4}$	5,0
Tomek	3	5	$\frac{3\cdot 3+5}{4} = \frac{14}{4}$	3,5

W powyższym przykładzie obliczyliśmy średnią ważoną.

Definicja

Średnią ważoną liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_k$ z odpowiadającymi im wagami: $n_1, n_2, \ldots, n_k$, będącymi liczbami dodatnimi, określamy wzorem:

$$\overline{x}_w = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz średnią ważoną liczb $x_1 = 4$ i $x_2 = 6$ z podanymi wagami.

a) $n_1 = 3,\ n_2 = 1$ b) $n_1 = 1,\ n_2 = 1$ c) $n_1 = 0{,}5,\ n_2 = 0{,}5$

Zauważ, że jeśli wszystkie wagi są równe, to średnia ważona liczb jest równa ich średniej arytmetycznej.

Ćwiczenie 2

Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	6	9	12	8
Waga	2	1	3	4

b)

Liczba	7	3	4	5
Waga	0,2	0,3	0,5	0,4

Ćwiczenie 1

a) $\overline{x}_w = \frac{18}{4} = 4{,}5$

b) $\overline{x}_w = \frac{10}{2} = 5$

c) $\overline{x}_w = \frac{5}{1} = 5$

Ćwiczenie 2

a) $\overline{x}_w = \frac{89}{10} = 8{,}9$

b) $\overline{x}_w = \frac{6{,}3}{1{,}4} = 4{,}5$

Ćwiczenie 3

Uczestnikom kursu języka angielskiego wystawiono oceny za cztery umiejętności: x_1 – za rozumienie ze słuchu, x_2 – za rozumienie tekstu pisanego, x_3 – za wypowiedzi pisemne, x_4 – za wypowiedzi ustne. Aby wystawić ocenę końcową, postanowiono obliczyć średnią ważoną z następującymi wagami: $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$, $n_4 = 3$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	Ocena końcowa
Asia	4	5	3	4	3,8
Basia	6	5	2	4	3,6
Kasia	2	6	5	4	4,6

a) Oblicz końcowe oceny Basi i Kasi.

b) Czy gdyby przyjęto $n_1 = 4$, a pozostałe wagi zostawiono bez zmian, to Basia miałaby wyższą ocenę końcową od swoich koleżanek?

Ćwiczenie 3

b) Asia: $\overline{x}_w = \frac{50}{13} \approx 3{,}8$

Basia: $\overline{x}_w = \frac{54}{13} \approx 4{,}2$

Kasia: $\overline{x}_w = \frac{52}{13} = 4$

Przykład 2

Oblicz średnią arytmetyczną liczb:

2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 7, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9

Sprawdzamy, ile razy wystąpiła każda z liczb 2, 7, 9, a następnie obliczamy średnią arytmetyczną:

Liczba x_i	2	7	9
Liczba wystąpień n_i	12	5	3

$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{12 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 3 \cdot 9}{20} = \frac{86}{20} = 4{,}3$$

Zauważ, że średnia arytmetyczna podanego zestawu danych jest średnią ważoną liczb 2, 7, 9 z wagami równymi liczbie wystąpień tych liczb.

Ćwiczenie 4

W pewnej grupie studentów zebrano dane dotyczące wysokości otrzymywanego stypendium i przedstawiono je w tabeli.

x_i – wysokość stypendium [zł]	0	300	600	800
n_i – liczba studentów	20	10	15	5

a) Oblicz średnią wysokość stypendium przypadającą na jednego studenta.

b) Studentom, którzy do tej pory nie otrzymywali stypendium, postanowiono wypłacać je w wysokości 250 zł. Ile obecnie wyniesie średnia wysokość stypendium?

Ćwiczenie 4

a) $\overline{x}_w = \frac{16\,000}{50} = 320$ [zł]

b) $\overline{x}_w = \frac{21\,000}{50} = 420$ [zł]

Zadania

1. Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	11	12	13
Waga	0,1	0,3	0,6

b)

Liczba	3	5	8	11
Waga	0,8	0,1	0,4	0,3

2. Konkurs składa się z czterech etapów ocenianych w skali od 0 do 10 punktów. W tabeli podano liczby punktów, które zdobyli finaliści. Ostateczny wynik jest średnią ważoną. Który zawodnik wygrał konkurs?

Etap	I	II	III	IV
Waga	0,2	0,8	0,4	0,6
Adam	10	5	8	7
Marek	5	8	6	7
Piotr	9	4	10	8

3. Dane są liczby x_1, x_2, x_3 i x_4. Sprawdź, czy w przykładach A i B średnia ważona jest taka sama.

A:

Liczba	x_1	x_2	x_3	x_4
Waga	3	2	5	2

B:

Liczba	x_1	x_2	x_3	x_4
Waga	0,6	0,4	1	0,4

4. Oblicz t, jeśli średnia ważona danych liczb jest równa 6,5.

a)

Liczba	t	4	8
Waga	0,3	0,3	0,9

b)

Liczba	15	9	3
Waga	2	3	t

5. Oblicz w, jeśli średnia ważona danych liczb jest równa 5.

a)

Liczba	3	9	w
Waga	0,7	0,3	0,1

b)

Liczba	10	8	6	2
Waga	w	3	5	8

6. Ocena semestralna z matematyki jest średnią ważoną ocen z wagami podanymi w tabeli. Tomek otrzymał następujące oceny:
– prace domowe: 1, 1, 1,
– kartkówki: 3, 1, 2,
– klasówki: 3, 6, 6.

Kategoria	Waga
praca domowa	1
kartkówka	2
klasówka	n

Dla jakiej wartości n średnia ważona tych ocen jest równa:
a) 3, b) 4?

Odpowiedzi do zadań

1. a) 12,5 **b)** 5,875

2. Adam: $\overline{x}_w = \frac{13,4}{2} = 6,7$
Marek: $\overline{x}_w = \frac{14}{2} = 7$
Piotr: $\overline{x}_w = \frac{13,8}{2} = 6,9$
Konkurs wygrał Marek.

3. A: $\overline{x}_w = \frac{3x_1+2x_2+5x_3+2x_4}{12} = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{5}{12}x_3 + \frac{1}{6}x_4$
B: $\overline{x}_w = \frac{0,6x_1+0,4x_2+x_3+0,4x_4}{2,4} = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{5}{12}x_3 + \frac{1}{6}x_4$
Zatem w obu przykładach średnia ważona jest taka sama.

4. a) $\frac{0,3t+1,2+7,2}{1,5} = 6,5$
$0,3t = 9,75 - 8,4$
$t = 4,5$
b) $\frac{30+27+3t}{5+t} = 6,5$
$3,5t = 24,5$
$t = 7$

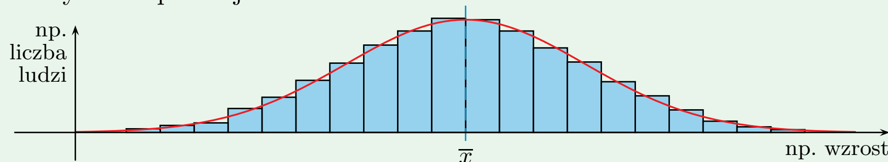
5. a) $\frac{2,1+2,7+0,1w}{1,1} = 5$
$0,1w = 5,5 - 4,8$
$w = 7$
b) $\frac{10w+24+30+16}{w+16} = 5$
$10w + 70 = 5w + 80$
$w = 2$

6. $\overline{x}_w = \frac{3+12+15n}{3+6+3n} = \frac{5+5n}{3+n}$
a) $\frac{5+5n}{3+n} = 3$
$2n = 4$
$n = 2$
b) $\frac{5+5n}{3+n} = 4$
$n = 7$

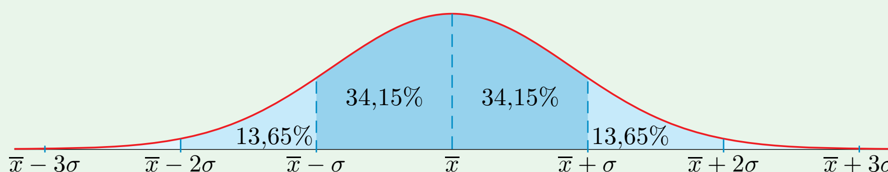
5.5. Zagadnienia uzupełniające

Rozkład normalny

Przy analizie wielu zjawisk, gdy mamy do dyspozycji dużą liczbę danych, diagram, za pomocą którego je porządkujemy, często ma taki kształt jak na rysunku poniżej:



Zdarza się to m.in. wówczas, gdy porządkujemy takie dane, jak wzrost i waga ludzi czy długość liści określonego drzewa. Taki rozkład danych nosi nazwę **rozkładu normalnego**. Krzywa (zaznaczona na rysunku kolorem czerwonym) jest nazywana **krzywą Gaussa**. Jest ona symetryczna względem prostej pionowej poprowadzonej przez średnią arytmetyczną danych. Jeśli rozkład danych jest rozkładem normalnym, to około 68,3% danych różni się od średniej o mniej niż odchylenie standardowe σ, a około 95,6% danych różni się od średniej o mniej niż 2σ. **Reguła trzech sigm** mówi, że do przedziału $(\overline{x}-3\sigma; \overline{x}+3\sigma)$ należy około 99,7% danych.



1. Przyjmijmy, że wyniki testu IQ przeprowadzonego w grupie 500 osób mają rozkład normalny ze średnią $\overline{x} = 100$ i odchyleniem standardowym $\sigma = 15$. Oszacuj, ile osób z tej grupy uzyskało wynik testu:
a) między 85 a 115, b) większy od 115, c) większy od 130.

2. Zebrano dane dotyczące wzrostu 200 uczniów liceum sportowego. Mają one rozkład normalny o średniej $\overline{x} = 177$ cm i odchyleniu standardowym $\sigma = 6$ cm. Oszacuj, ilu uczniów ma wzrost powyżej 171 cm.

3. Żarówki produkowane przez pewną firmę przepalają się średnio po 2000 godzin. Przyjmując, że zebrane dane mają rozkład normalny, oszacuj, ile żarówek z partii liczącej 20 000 sztuk przepali się przed upływem 1400 godzin, a ile przed upływem 1100 godzin, jeżeli odchylenie standardowe $\sigma = 300$ godzin.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $0{,}683 \cdot 500 = 341{,}5$, czyli 342 osoby

b) $\frac{500-342}{2} = 79$

c) $\frac{100\%-95{,}6\%}{2} = 2{,}2\%$

$0{,}022 \cdot 500 = 11$

2. Wzrost mniejszy niż $\overline{x}-\sigma = 171$ cm ma $\frac{100\%-68{,}3\%}{2} = 15{,}85\%$ uczniów.

$0{,}1585 \cdot 200 = 31{,}7 \approx 32$

Zatem wzrost powyżej 171 cm ma 168 uczniów.

3. $1400 = \overline{x}-2\sigma$

$\frac{100\%-95{,}6\%}{2} = 2{,}2\%$

$0{,}022 \cdot 20000 = 440$

$1100 = \overline{x}-3\sigma$

$\frac{100\%-99{,}7\%}{2} = 0{,}15\%$

$0{,}0015 \cdot 20000 = 30$

Przed upływem 1400 godzin przepali się 440 żarówek, a przed upływem 1100 godzin – 30 żarówek.

Multiteka
- Krzywa Gaussa

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę danych liczb.

a) 5, 4, 3, 2, 4, 3, 5, 4

b) 9, 12, 9, 12, 7, 9, 94, 8, 20

c) 8, 8, 1, 3, 4, 6, 1, 6, 8

d) 4, 16, 13, 5, 7, 16, 15, 4

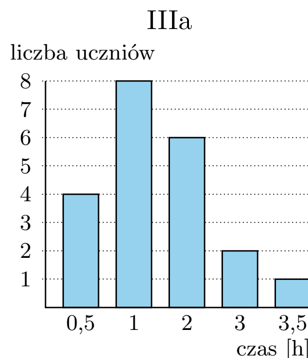
2. Studenci matematyki zdawali egzamin w dwóch grupach. W tabeli podano liczby poszczególnych ocen, jakie otrzymali. Oblicz średnią ocen z egzaminu dla każdej grupy.

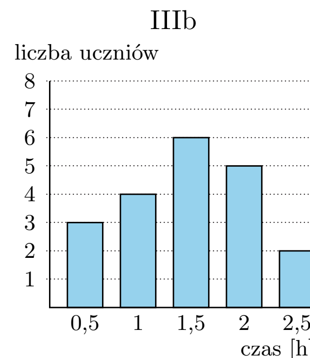
Ocena	2	3	3,5	4	4,5	5
Grupa I	3	6	5	3	3	2
Grupa II	0	3	4	6	4	3

3. W ciągu kolejnych siedmiu dni szkolnego rajdu rowerowego przebyto trasy długości: 26 km, 34 km, 40 km, 44 km, 45 km, 37 km, 26 km. Oblicz średnią długość trasy przebytej jednego dnia oraz odchylenie standardowe.

4. Wagi urodzeniowe sześciu noworodków urodzonych jednego dnia na oddziale pewnego szpitala były równe (w gramach): 3500, 3100, 2850, 3300, 3550, 4700. Oblicz średnią wagę noworodków oraz odchylenie standardowe.

5. W klasach IIIa oraz IIIb pewnej szkoły przeprowadzono ankietę. Każdy uczeń odpowiedział na pytanie: „Ile godzin dziennie oglądasz telewizję?”. Wyniki ankiety przedstawiono na poniższych diagramach. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zebranych danych dla każdej klasy oraz dla obu klas razem.





Odpowiedzi do zadań

1. a) 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5

$\overline{x} = \frac{30}{8} = 3{,}75$, $M = 4$, $D = 4$

b) 7, 8, 9, 9, 9, 12, 12, 20, 94

$\overline{x} = \frac{180}{9} = 20$, $M = 9$, $D = 9$

c) 1, 1, 3, 4, 6, 6, 8, 8, 8

$\overline{x} = \frac{45}{9} = 5$, $M = 6$, $D = 8$

d) 4, 4, 5, 7, 13, 15, 16, 16

$\overline{x} = \frac{80}{8} = 10$, $M = \frac{7+13}{2} = 10$, $D_1 = 4$, $D_2 = 16$

2. grupa I: $\overline{x} = \frac{77}{22} = 3{,}5$

grupa II: $\overline{x} = \frac{80}{20} = 4$

3. $\overline{x} = \frac{252}{7} = 36$ [km]

$\sigma = \sqrt{\frac{366}{7}} \approx 7{,}23$ [km]

4. $\overline{x} = \frac{21\,000}{6} = 3500$ [g]

$\sigma = \sqrt{\frac{2\,065\,000}{6}} \approx 586{,}66$ [g]

5. IIIa: $\overline{x} = \frac{31{,}5}{21} = 1{,}5$ [h], $M = 1$ h, $D = 1$ h

IIIb: $\overline{x} = \frac{29{,}5}{20} = 1{,}475$ [h], $M = 1{,}5$ h, $D = 1{,}5$ h

Obie klasy:

Czas [h]	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
Liczba uczniów	7	12	6	11	2	2	1

$\overline{x} = \frac{61}{41} \approx 1{,}49$ [h], $M = 1{,}5$ h, $D = 1$ h

6. Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	2	9	6	8
Waga	5	1	2	3

b)

Liczba	5	10	12	20
Waga	0,1	1,1	0,3	0,5

7. Ocena roczna jest średnią ważoną (zaokrągloną do liczby całkowitej) ocen: za pierwszy semestr z wagą 0,4 i za drugi semestr z wagą 0,6. Jakie oceny roczne otrzymali uczniowie, których oceny semestralne podano w tabeli?

Uczeń	A	B	C	D	E
I semestr	5	6	3	2	5
II semestr	6	5	5	5	2

Zestaw II

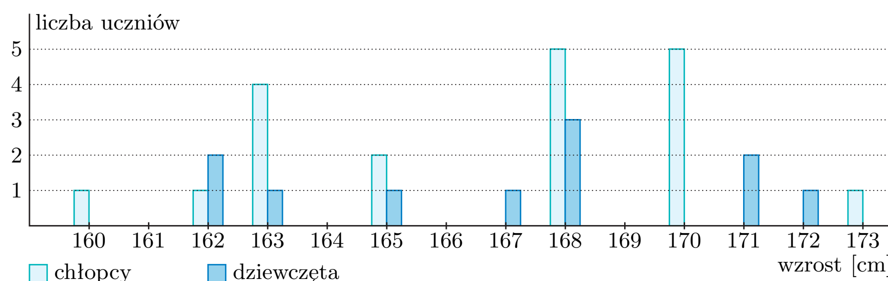
1. Średnia arytmetyczna liczb: a, b, c, d jest równa 8. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

A. Średnia arytmetyczna liczb: $a, b, c, d, 0$ jest równa 8.

B. Średnia arytmetyczna liczb: $a, b, c, d, 13$ jest równa 9.

C. Średnia arytmetyczna liczb: a, a, b, b, c, c, d, d jest równa 16.

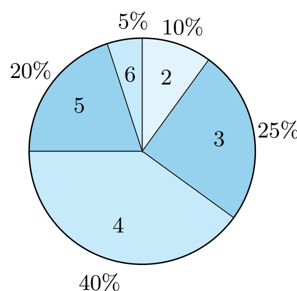
2. Na poniższym diagramie przedstawiono dane dotyczące wzrostu dziewcząt i chłopców w pewnej klasie liceum.



a) Ile dziewcząt ma wzrost większy niż średni wzrost w grupie dziewcząt?

b) Ilu chłopców ma wzrost większy niż średni wzrost wszystkich uczniów w klasie?

3. Na diagramie kołowym podano procentowy rozkład ocen semestralnych z matematyki w pewnej szkole. Oblicz średnią ocen z matematyki w tej szkole. Ile wynosi odchylenie standardowe przedstawionych danych?



6. **a)** $\overline{x}_w = \frac{55}{11} = 5$

b) $\overline{x}_w = \frac{25,1}{2} = 12,55$

7. A: 5,6 ≈ 6, B: 5,4 ≈ 5, C: 4,2 ≈ 4, D: 3,8 ≈ 4, E: 3,2 ≈ 3

Zestaw II

1. $\frac{a+b+c+d}{4} = 8$, czyli

$a + b + c + d = 32$

A: $\frac{a+b+c+d+0}{5} = \frac{32}{5} \neq 8$

B: $\frac{a+b+c+d+13}{5} = \frac{45}{5} = 9$

C: $\frac{2(a+b+c+d)}{8} = \frac{64}{8} \neq 16$

2. $\overline{x}_d = \frac{1837}{11} = 167$ [cm]

$\overline{x} = \frac{5004}{30} = 166,8$ [cm]

a) 6 dziewcząt

b) 11 chłopców

3. $\overline{x} = 0,1 \cdot 2 + 0,25 \cdot 3 + 0,4 \cdot 4 + 0,2 \cdot 5 + 0,05 \cdot 6 = 3,85$

$\sigma^2 = 15,85 - 14,8225 = 1,0275$

$\sigma = \sqrt{1,0275} \approx 1,01$

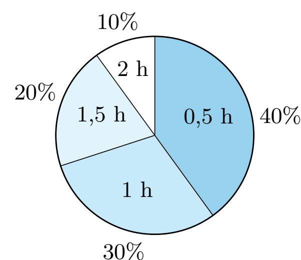
4. $\overline{x} = 1$ h
$\sigma^2 = 1{,}25 - 1 = 0{,}25$ [h^2]
$\sigma = 0{,}5$ h

5. a) $\overline{x} = \frac{13+a}{6}$
$\sigma^2 = \frac{2 \cdot 1^2+2^2+4^2+5^2+a^2}{6} +$
$- \left(\frac{13+a}{6}\right)^2$
$\frac{47+a^2}{6} - \frac{169+26a+a^2}{36} = \frac{13+a}{6}$
$5a^2 - 32a + 35 = 0$
$a = 1{,}4$ lub $a = 5$
b) $\overline{x} = \frac{29+x+y}{7} = 5$
$\sigma = \sqrt{\frac{183+x^2+y^2}{7} - 25} = 2$
$x = 2$, $y = 4$

6. Suma ocen wzrosłaby o 3, więc średnia ocen w grupie I byłaby wyższa o $\frac{3}{12} = 0{,}25$, a średnia ocen w klasie byłaby wyższa o $\frac{3}{30} = 0{,}1$.

7. Nie można rozstrzygnąć, który lek jest skuteczniejszy.

4. Grupie uczniów zadano pytanie: „Ile godzin dziennie poświęcasz na czytanie książek?”. Wyniki ankiety przedstawiono na zamieszczonym obok diagramie. Oblicz wariancję i odchylenie standardowe tych wyników.



5. a) Średnia arytmetyczna liczb: 2, 1, 5, a, 4, 1 jest równa ich wariancji. Oblicz a.

b) Średnia arytmetyczna liczb: 7, 3, x, y, 8, 5, 6 jest równa 5, a odchylenie standardowe jest równe 2. Oblicz x i y, jeśli $x < y$.

6. Uczniów klasy IIIa podzielono na grupy według pierwszych liter nazwisk: grupa I – od A do K, grupa II – od L do P, grupa III – od R do Ż. Średnią ocen semestralnych z języka polskiego w każdej z grup przedstawiono w tabeli.

	Grupa I	Grupa II	Grupa III
Liczba uczniów	12	8	10
Średnia ocen w grupie	3,5	3,25	4,3

Troje uczniów w grupie I otrzymało na koniec semestru ocenę niedostateczną. O ile byłaby wyższa średnia ocen w tej grupie, a o ile w całej klasie, gdyby uczniowie ci na koniec semestru otrzymali ocenę dopuszczającą, a oceny reszty uczniów pozostały bez zmian?

7. W pewnej kuracji stosuje się lek X lub lek Y. Lek X podano jednej grupie pacjentów, a lek Y – drugiej. Poniżej przedstawiono dane dotyczące skuteczności każdego z nich (z podziałem na płeć pacjentów). Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Który lek jest skuteczniejszy?

Lek X		Kobiety	Mężczyźni	Razem
Liczba osób		200	300	500
Lek skuteczny	liczba osób	30	120	150
	procent osób	15%	40%	30%

Lek Y		Kobiety	Mężczyźni	Razem
Liczba osób		400	100	500
Lek skuteczny	liczba osób	80	45	125
	procent osób	20%	45%	25%

W przykładzie będziemy korzystać z poniższego wzoru na wariancję liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, których średnia arytmetyczna jest równa $\overline{x}$:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (\overline{x})^2$$

Przykład

Grupę siedmiorga uczniów zapytano o to, ile czasu każdemu z nich zajmuje powrót ze szkoły do domu. Wyniki przedstawiono w poniższej tabeli. Oblicz odchylenie standardowe czasu powrotu dla całej siedmioosobowej grupy.

	Dziewczęta	Chłopcy
Liczba pytanych	4	3
Średni czas [min]	40	35
Odchylenie standardowe [min]	4	2

Niech x_1, x_2, x_3 i x_4 będą czasami powrotu dziewcząt ze szkoły do domu, a y_1, y_2 i y_3 – czasami powrotu chłopców. Oznaczmy średnie czasy dziewcząt i chłopców odpowiednio przez $\overline{x}_d$ i $\overline{y}_c$. Wówczas $\overline{x}_d = 40$ i $\overline{y}_c = 35$.

Obliczamy średni czas $\overline{x}$ powrotu ze szkoły do domu dla całej grupy uczniów (jest on średnią ważoną liczb $\overline{x}_d$ i $\overline{y}_c$):

$$\overline{x} = \frac{4 \cdot \overline{x}_d + 3 \cdot \overline{y}_c}{4+3} = \frac{4 \cdot 40 + 3 \cdot 35}{7} = \frac{265}{7} \approx 37{,}86$$

Wariancja dla czworga dziewcząt dana jest wzorem:

$$\sigma_d^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{4} - (\overline{x}_d)^2$$

Zatem:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4(\sigma_d^2 + (\overline{x}_d)^2) = 4(4^2 + 40^2) = 6464$$

Wariancja dla trzech chłopców dana jest wzorem:

$$\sigma_c^2 = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{3} - (\overline{y}_c)^2$$

Zatem:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 3(\sigma_c^2 + (\overline{y}_c)^2) = 3(2^2 + 35^2) = 3687$$

Obliczamy wariancję dla całej siedmioosobowej grupy:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{7} - (\overline{x})^2 \approx \frac{6464 + 3687}{7} - (37{,}86)^2 \approx 16{,}76$$

Zatem odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx 4{,}09$ min

Odpowiedź: Odchylenie standardowe dla całej grupy wynosi 4,09 min.

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

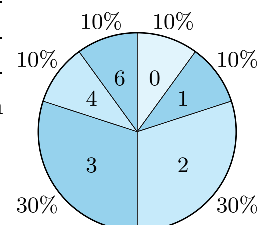
1. $\overline{x} = \frac{39\,800}{10} = 3980$ [zł]

1. W pewnej firmie jest zatrudnionych 10 osób. Ich miesięczne wynagrodzenia wynoszą: 2900 zł, 3100 zł, 3100 zł, 3240 zł, 3290 zł, 3300 zł, 3320 zł, 3750 zł, 5800 zł, 8000 zł. Ilu pracowników tej firmy ma wynagrodzenie wyższe od wynagrodzenia średniego?

A. 6 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

2. $M = 2{,}5$, $\overline{x} = 2{,}6$

2. Grupie 50 losowo wybranych osób w pewnym mieście zadano pytanie: „Ile godzin w tygodniu poświęcasz na uprawianie sportu?". Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie. O ile mediana otrzymanych danych jest niższa od ich średniej arytmetycznej?



A. 0,1 **C.** 0,3
B. 0,2 **D.** 0,4

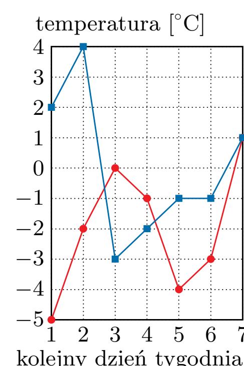
3. $M = \frac{b+c}{2} = 7$, czyli $b + c = 14$ oraz $bc = 24$, zatem $b = 2$ i $c = 12$

3. Liczby a, b, c, d ustawiono w kolejności rosnącej, a ich mediana jest równa 7. Jeśli $bc = 24$, to:

A. $(b - c)^2 = 0$, **C.** $(b - c)^2 = 100$,
B. $(b - c)^2 = 25$, **D.** $(b - c)^2 = 144$.

4. $\overline{x}_1 = 0$
$\overline{x}_2 = -2$
$\overline{x}_3 = -1$

4. Rafał przez dwa tygodnie ferii, codziennie o godzinie 12, mierzył temperaturę powietrza. Wyniki pomiarów przedstawił na wykresie (kolorem niebieskim zaznaczył wyniki z pierwszego tygodnia, a kolorem czerwonym – z drugiego).
Niech $\overline{x}_1$ oznacza średnią temperaturę w pierwszym tygodniu, $\overline{x}_2$ – w drugim, a $\overline{x}_3$ – w obu tygodniach. Wówczas:



A. $\overline{x}_2 < \overline{x}_1 < \overline{x}_3$, **C.** $\overline{x}_1 < \overline{x}_3 < \overline{x}_2$,
B. $\overline{x}_3 < \overline{x}_1 < \overline{x}_2$, **D.** $\overline{x}_2 < \overline{x}_3 < \overline{x}_1$.

5. $\overline{x}_1 = \frac{13}{1} = 13$
$\overline{x}_2 = \frac{51}{3} = 17$

5. W tabeli podano liczby z dwoma zestawami wag. Niech $\overline{x}_1$ oznacza średnią tych liczb z wagami X, a $\overline{x}_2$ – ich średnią z wagami Y. Wówczas $\overline{x}_2 - \overline{x}_1$ jest równe:

Liczba	10	15	20
Waga X	0,5	0,4	0,1
Waga Y	0,3	1,2	1,5

A. 6, **B.** 4, **C.** 2, **D.** 0.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Karolina ma z chemii następujące oceny: 5, 2, 3, x, 5, $x+1$, 5, 3, 2. Oblicz x, jeśli wiadomo, że średnia ocen wynosi 4. Wyznacz ich medianę i dominantę.

Zadanie 2 (2 pkt)

Wynik egzaminu jest średnią ważoną punktów uzyskanych z testów: z matematyki z wagą 0,5, z geografii z wagą 0,2 oraz z języka obcego z wagą 0,3. Ile może wynosić wynik z matematyki kandydata X, jeśli zdał on egzamin lepiej od kandydata Y, ale gorzej od kandydata Z?

Kandydat	X	Y	Z
Matematyka	x	40	60
Geografia	40	50	40
Język obcy	60	60	50

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 3 (4 pkt)

Uczniowie pisali sprawdzian w trzech grupach A, B i C, liczących odpowiednio 8, 10 i 6 osób. Średnia ocen w grupach A i B łącznie wyniosła 4, a w grupach B i C łącznie wyniosła 3. Oblicz średnią ocen dla każdej z grup, jeśli średnia całej klasy była równa 3,5.

Zadanie 4 (4 pkt)

Pewna firma ma trzy zakłady produkcyjne. W tabeli podano informacje o średnich zarobkach w tych zakładach.

	Zakład I	Zakład II	Zakład III
Liczba pracowników	20	15	15
Średnie wynagrodzenie	4000 zł	3600 zł	4400 zł
Odchylenie standardowe	400 zł	500 zł	σ_3

Oblicz odchylenie standardowe zarobków w zakładzie III, jeśli odchylenie standardowe zarobków wszystkich pracowników tych zakładów jest równe 600 zł.

Zadanie 5 (4 pkt)

W fokarium zważono wszystkie foki: osiem samców i cztery samice. Średnia waga samców była równa 250 kg z odchyleniem standardowym 50 kg. Średnia waga samic była równa 150 kg z odchyleniem standardowym 30 kg. Do fokarium przybyły dwie samice ważące po 170 kg. Oblicz średnią wagę oraz odchylenie standardowe wag wszystkich fok przebywających teraz w fokarium.

Odpowiedzi do zadań

1. $\frac{2x+26}{9} = 4$, czyli $x = 5$

$2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 6$

$M = 5, D = 5$

2. $Y\colon \overline{x} = 48$

$Z\colon \overline{x} = 53$

$X\colon \overline{x} = 0{,}5x + 26$

$48 < 0{,}5x + 26 < 53$

$44 < x < 54$

Zatem $45 \leqslant x \leqslant 53$.

3. Niech a, b, c – sumy ocen odpowiednio w grupach A, B i C.

$$\begin{cases} \frac{a+b}{18} = 4 \\ \frac{b+c}{16} = 3 \\ \frac{a+b+c}{24} = 3{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 36 \\ b = 36 \\ c = 12 \end{cases}$$

$\overline{x}_A = 4{,}5$, $\overline{x}_B = 3{,}6$, $\overline{x}_C = 2$

4. $\overline{x} = \frac{80\,000+54\,000+66\,000}{20+15+15} =$

$= \frac{200\,000}{50} = 4000$ [zł]

$\sigma^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n} - \overline{x}^2$

$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 = n\left(\sigma^2 + \overline{x}^2\right)$

$20 \cdot \left(400^2 + 4000^2\right) +$

$+15 \cdot \left(500^2 + 3600^2\right) +$

$+15 \cdot \left(\sigma_3^2 + 4400^2\right) =$

$= 50 \cdot \left(600^2 + 4000^2\right)$

$323\,200\,000 + 198\,150\,000 +$

$+15\sigma_3^2 + 290\,400\,000 =$

$= 818\,000\,000$

$15\sigma_3^2 = 6\,250\,000$

$\sigma_3 = \sqrt{\frac{6\,250\,000}{15}} \approx 645{,}50$ [zł]

5. Niech $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$ – wagi samców, y_1, y_2, y_3, y_4 – wagi pierwszych 4 samic.
Średnia waga wszystkich fok:

$$\overline{x} = \frac{8\cdot250+4\cdot150+2\cdot170}{14} = \frac{2940}{14} = 210 \text{ [kg]}$$

Wariancja wag samców:

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_8^2}{8} - 250^2 = 50^2$$

czyli $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_8^2 = 520\,000$

Wariancja wag 4 samic: $\frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2}{4} - 150^2 = 30^2$, czyli $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 93\,600$

Wariancja wag wszystkich fok:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2+\ldots+x_8^2+y_1^2+\ldots+y_4^2+2\cdot170^2}{14} - 210^2 = \frac{671\,400}{14} - 44100 \approx 3857{,}14 \text{ [kg}^2\text{]}$$

Odchylenie standardowe wag wszystkich fok: $\sigma \approx 62{,}11$ kg

Indeks

Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	–	45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	46°	0,7193	0,6947	1,0355	0,9657
2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	47°	0,7314	0,6820	1,0724	0,9325
3°	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	48°	0,7431	0,6691	1,1106	0,9004
4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	49°	0,7547	0,6561	1,1504	0,8693
5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	50°	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
6°	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	51°	0,7771	0,6293	1,2349	0,8098
7°	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	52°	0,7880	0,6157	1,2799	0,7813
8°	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	53°	0,7986	0,6018	1,3270	0,7536
9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	54°	0,8090	0,5878	1,3764	0,7265
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	55°	0,8192	0,5736	1,4281	0,7002
11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	56°	0,8290	0,5592	1,4826	0,6745
12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	57°	0,8387	0,5446	1,5399	0,6494
13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	58°	0,8480	0,5299	1,6003	0,6249
14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	59°	0,8572	0,5150	1,6643	0,6009
15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	60°	0,8660	0,5000	1,7321	0,5774
16°	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	61°	0,8746	0,4848	1,8040	0,5543
17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	62°	0,8829	0,4695	1,8807	0,5317
18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	63°	0,8910	0,4540	1,9626	0,5095
19°	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	64°	0,8988	0,4384	2,0503	0,4877
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	65°	0,9063	0,4226	2,1445	0,4663
21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	66°	0,9135	0,4067	2,2460	0,4452
22°	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	67°	0,9205	0,3907	2,3559	0,4245
23°	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	68°	0,9272	0,3746	2,4751	0,4040
24°	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	69°	0,9336	0,3584	2,6051	0,3839
25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	70°	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	71°	0,9455	0,3256	2,9042	0,3443
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	72°	0,9511	0,3090	3,0777	0,3249
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	73°	0,9563	0,2924	3,2709	0,3057
29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	74°	0,9613	0,2756	3,4874	0,2867
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	75°	0,9659	0,2588	3,7321	0,2679
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	76°	0,9703	0,2419	4,0108	0,2493
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	77°	0,9744	0,2250	4,3315	0,2309
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	78°	0,9781	0,2079	4,7046	0,2126
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	79°	0,9816	0,1908	5,1446	0,1944
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	80°	0,9848	0,1736	5,6713	0,1763
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	81°	0,9877	0,1564	6,3138	0,1584
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	82°	0,9903	0,1392	7,1154	0,1405
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	83°	0,9925	0,1219	8,1443	0,1228
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	84°	0,9945	0,1045	9,5144	0,1051
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	85°	0,9962	0,0872	11,430	0,0875
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	86°	0,9976	0,0698	14,301	0,0699
42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	87°	0,9986	0,0523	19,081	0,0524
43°	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	88°	0,9994	0,0349	28,636	0,0349
44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	89°	0,9998	0,0175	57,290	0,0175